

Teoria ergodyczna

WPPT Matematyka, IIIr. semestr zimowy 2008/9

Lista zadań 1

28/10/08

ZADANIE 1.

Niech $T : (X, \mathcal{F}) \rightarrow (X, \mathcal{F})$ będzie transformacją mierzalną. Wiemy, że każda miara μ na \mathcal{F} jest przeprowadzana przez T na miarę oznaczaną $T\mu$ (też na \mathcal{F}) zdefiniowaną wzorem $T\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$. Sprawdź, że dla dowolnej funkcji mierzalnej f na X zachodzi równość

$$\int f d(T\mu) = \int (f \circ T) d\mu$$

(o ile przynajmniej jedna ze stron ma sens).

ZADANIE 2.

Niech (X, T) będzie topologicznym układem dynamicznym (odwzorowanie ciągle na przestrzeni zwartej). Sprawdź, że zbiór $\mathcal{P}_T(X)$ miar probabilistycznych T -niezmennych jest wypukły, tzn., jeśli $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}_T(X)$ i $p \in (0, 1)$ to

$$p\mu_1 + (1-p)\mu_2 \in \mathcal{P}_T(X).$$

ZADANIE 3.

Niech (X, T) będzie topologicznym układem dynamicznym. Sprawdź, że jeśli miara probabilistyczna niezmiennicza μ NIE JEST ergodyczna, to istnieją $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}_T(X)$ i $p \in (0, 1)$ takie, że $\mu = p\mu_1 + (1-p)\mu_2$.

ZADANIE 4.

Sprawdź, że jeśli $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-1} \rightarrow x_0$ jest orbitą okresową, to miara probabilistyczna atomowa przypisująca każdemu z punktów x_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) masę $\frac{1}{n}$ jest niezmiennicza i ergodyczna.

ZADANIE 5.

Znajdź wszystkie miary probabilistyczne niezmiennicze (najpierw ergodyczne, potem dowolne) transformacji (ciągłej)

$$T : \{0, 1, \dots, 9\} \rightarrow \{0, 1, \dots, 9\}$$

zadanej wzorem $T(x) = x^2 \pmod{10}$.

ZADANIE 6.

Udowodnij, że „shift” na $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ z miarą produktową $\{p, 1-p\}^{\mathbb{Z}}$ ($p \in [0, 1]$) jest ergodyczny. To samo dla shiftu na $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Wskazówka: Hipotetyczny zbiór niezmienniczy A przybliżyć skończoną sumą cylindrów B , następnie zastosować dużą iterację shiftu σ^n i wykazać że miara przekroju B

$\sigma^{-n}(B)$ jest kwadratem miary B . Wywnioskować z tego, że liczba $\mu(A)$ ma tę własność, że jest równa swemu kwadratowi.

ZADANIE 7. Zapoznać się z wykładem 5: „Twierdzenie Poicaré”, zrozumieć dowód i zapamiętać twierdzenie. Dla układu z miarą probabilistyczną ergodyczną, jak Tw. Pincaré wynika natychmiast z Tw. ergodycznego?

UWAGA! DALSZY ZADANIA SĄ UMIESZCZONE W WYKŁADACH 5, 6, ITD.
LISTY ZADAŃ 2 I 3 TO LISTY POWTÓRKOWE PRZED 1 I 2 KOŁOKWIUM.

Tomasz Downarowicz